



TESIS - SM142501

KONTROL OPTIMAL SISTEM INVENTORI DENGAN MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK

VYLDA PAVELA
NRP 1213 2012 03

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015



THESIS - SM142501

OPTIMAL CONTROL OF INVENTORY SYSTEMS WITH DETERIORATING PRODUCT

VYLDA PAVELA
NRP 1213 2012 03

SUPERVISOR
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2015

KONTROL OPTIMAL SISTEM INVENTORI DENGAN MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

VYLDA PAVELA

NRP. 1213 201 203

Tanggal Ujian : 9 Juli 2015

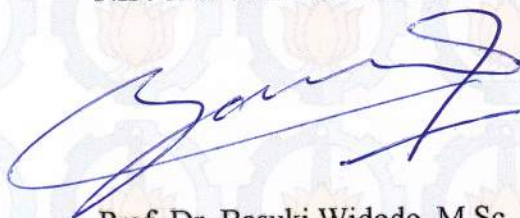
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh :



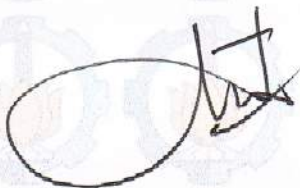
Dr. Dra. Mardijah, M.T.
NIP. 19670114 199102 2 001

(Pembimbing)



Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

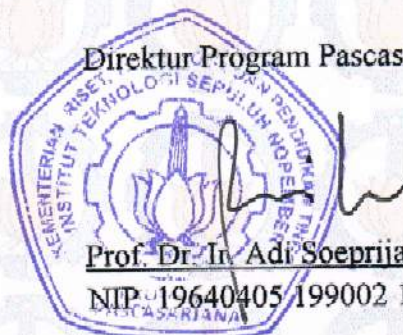
(Penguji)



Dr. Drs. Hariyanto, M.Si.
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana



Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP. 19640405 199002 1 001

KONTROL OPTIMAL SISTEM INVENTORI DENGAN MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK

Nama Mahasiswa : Vylde Pavela
NRP : 1213 2012 03
Dosen Pembimbing : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRAK

Inventori atau persediaan dalam proses produksi dapat dikatakan sebagai produk jadi yang ditempatkan pada sebuah gudang penyimpanan sebelum dipesan oleh konsumen. Produk yang terlalu lama disimpan akan beresiko mengalami kerusakan. Sebaliknya, jika perusahaan produksi tidak mempunyai persediaan yang mencukupi, maka perusahaan tidak dapat memenuhi permintaan konsumen sehingga mengakibatkan hilangnya konsumen. Oleh karena itu, diperlukan adanya pengendalian pada sistem inventori agar perusahaan tidak mengalami kerugian. Sistem inventori merupakan model dinamis sehingga dapat disajikan sebagai permasalahan kontrol optimal. Pada penelitian ini membahas tentang konstruksi model sistem inventori yang memperhatikan kerusakan produk dan adanya kontrol optimal untuk meminimumkan biaya penalti yaitu biaya yang muncul saat banyaknya inventori dan banyaknya produksi tidak sesuai dengan yang diinginkan. Penyelesaian kontrol optimal tersebut menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Pada bagian akhir, solusi yang diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab berdasarkan metode beda hingga. Hasil simulasi menunjukkan untuk semua fungsi permintaan bahwa grafik fungsi inventori yang optimal menuju pada inventori yang diinginkan dan grafik fungsi produksi yang optimal juga menuju pada produksi yang diinginkan sehingga mendapatkan biaya penalti yang minimum.

Kata kunci : kontrol optimal, metode beda hingga, Prinsip Maksimum Pontryagin, sistem inventori.

OPTIMAL CONTROL OF INVENTORY SYSTEMS WITH DETERIORATING PRODUCT

Name : Vylida Pavela
Student Identity Number : 1213 2012 03
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRACT

Inventory or supply in production can be expressed as finished product which is placed in warehouse before ordered by consumer. An old saved product has a deteriorating risk. The other way, if manufacturing industry doesn't have enough supplies, so they can't fill consumer demands, so that they will loss their consumers. Therefore, need a control for their inventory systems, in order that manufacturing industry doesn't get loss. Inventory system is dynamical model, so it can expressed as optimal control problems. In this research, the inventory system model is constructed with considering deteriorating product and the existence of optimal control is to minimize penalty cost, which is a cost when the inventory level and production level are not following goal rates. Optimal control is solved by Maximum Pontryagin Principle. In the final section, the result is describing by numerical simulation with Matlab software according to finite difference method. It's simulation result shows for all of demand function that optimal inventory function graphic follows inventory goal rate and optimal production function graphic follows production goal rate, so that minimum penalty cost function is obtained.

Keywords : finite difference method, optimal control, Pontryagin Maximum Principle, inventory system.

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufiq, dan Hidayah-Nya, serta junjungan Beliau Rasulullah SAW atas suri teladan yang dibawanya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **“Kontrol Optimal Sistem Inventori dengan Memperhatikan Kerusakan Produk.”** ini tepat pada waktunya. Tesis ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar magister di Program Studi Magister Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan Tesis ini tidak lepas dari bimbingan, bantuan, dan dukungan moral maupun spiritual dari banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Agus Basuki, Ibu Qumaidah, beserta adik Afry Rabel dan adik Briham Maulidan tercinta yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi agar penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Dr. Dra. Mardlijah, M.T. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan masukan dan mendorong penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.
4. Dr. Subiono, M.S., selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingan selama penulis menempuh kuliah.
5. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Dr. Drs. Hariyanto, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan juga motivasi bagi penulis sehingga Tesis ini dapat selesai tepat waktu.
6. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Program Studi Magister Matematika atas segala bantuannya.
7. Eko Alan Kusumayadi S.P.L, dan sahabat penulis lainnya atas semua bantuan, semangat, dan dukungannya selama proses penulisan Tesis ini.

8. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2013, dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan Tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Kritik dan saran bisa dikirim melalui email penulis pvylida@yahoo.com. Akhirnya semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 4 Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Model Sistem Inventori.....	5
2.2 Biaya-Biaya Inventori	6
2.3 Kontrol Optimal	8
2.4 Prinsip Maksimum Pontryagin.....	9
BAB 3 METODE PENELITIAN	11
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.....	13
4.1 Pengembangan Model Inventori dengan Kerusakan Produk	13
4.2 Penyelesaian Kontrol Optimal	15
4.2.1 Menentukan Produksi Optimal.....	18
4.2.2 Menentukan Inventori Optimal	20

4.3	Simulasi Numerik	21
4.3.1	Permintaan konsumen meningkat	21
4.3.2	Permintaan konsumen musiman	25
4.3.3	Permintaan konsumen menurun.....	32
4.3.4	Permintaan konsumen tidak pasti	35
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	39
5.1	Kesimpulan.....	39
5.2	Saran	39
	DAFTAR PUSTAKA	41
	LAMPIRAN	43
	BIODATA PENULIS	51

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Diagram kompartemen model sistem inventori	13
Gambar 4.2 Fungsi permintaan bentuk kuadrat	22
Gambar 4.3 Fungsi inventori kasus pertama.....	22
Gambar 4.4 Fungsi produksi kasus pertama	23
Gambar 4.5 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus pertama	23
Gambar 4.6 Fungsi biaya penalti kasus pertama.....	24
Gambar 4.7 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus pertama.....	24
Gambar 4.8 Fungsi permintaan bentuk sinus	25
Gambar 4.9 Fungsi inventori pada kasus kedua	26
Gambar 4.10 Fungsi produksi pada kasus kedua	26
Gambar 4.11 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus kedua	27
Gambar 4.12 Fungsi biaya penalti kasus kedua	27
Gambar 4.13 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus kedua	28
Gambar 4.14 Fungsi permintaan bentuk cosinus	29
Gambar 4.15 Fungsi inventori pada kasus ketiga	29
Gambar 4.16 Fungsi produksi pada kasus ketiga.....	30
Gambar 4.17 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus ketiga	30
Gambar 4.18 Fungsi biaya penalti kasus ketiga.....	31
Gambar 4.19 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus ketiga	31
Gambar 4.20 Fungsi permintaan bentuk eksponensial	32
Gambar 4.21 Fungsi inventori pada kasus keempat	33
Gambar 4.22 Fungsi produksi pada kasus keempat	33
Gambar 4.23 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus keempat	34
Gambar 4.24 Fungsi biaya penalti kasus keempat	34
Gambar 4.25 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus keempat.....	35
Gambar 4.26 Fungsi permintaan tidak pasti	36
Gambar 4.28 Fungsi inventori pada kasus kelima	36
Gambar 4.29 Fungsi produksi pada kasus kelima.....	37
Gambar 4.30 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus kelima	37

Gambar 4.31 Fungsi biaya penalti kasus kelima	38
Gambar 4.32 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan θ_t kasus keempat	38

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Untuk mengatasi persaingan pasar yang semakin ketat di zaman globalisasi ini, perusahaan harus mampu meningkatkan kualitas perusahaannya. Salah satu cara perusahaan meningkatkan kualitasnya agar dapat bertahan dalam pasar yaitu dengan melakukan manajemen inventori produksi. Manajemen inventori produksi adalah bagaimana mengatur perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi, sehingga perusahaan tersebut harus membuat perencanaan dalam memproduksi barang agar sesuai dengan banyaknya permintaan dengan cara menempatkan produk dalam suatu tempat sebelum dipesan oleh konsumen. Produk yang terlalu lama disimpan akan beresiko mengalami kerusakan. Sebaliknya, jika perusahaan tidak mempunyai persediaan yang mencukupi, maka perusahaan tidak dapat memenuhi permintaan konsumen sehingga mengakibatkan hilangnya konsumen.

Pada beberapa literatur telah dibahas banyak model tentang inventori, salah satu model inventori yang paling sederhana yaitu model *Economic Order Quantity* (EOQ). Pada model ini permintaan konsumen adalah konstan sepanjang waktu. Sehingga untuk kasus yang lebih nyata, model ini kurang cocok. Model inventori yang permintaan konsumennya berubah ubah seiring berjalannya waktu tidak dapat diramalkan atau diperkirakan, sehingga diperlukan pengendalian inventori dengan mengontrol banyaknya inventori dan meminimumkan biaya inventori total.

Banyak penelitian yang membahas tentang kontrol optimal dalam manajemen inventori. Sethi dan Thompson (2000) membahas kontrol optimal model inventori dengan biaya dinamis tetapi tanpa memperhatikan kerusakan produk. Khemlnitsky dan Gerchak (2002) menggunakan kontrol optimal untuk menyelesaikan sistem inventori dimana permintaan bergantung pada banyaknya inventori. Bounkhel dan Tadj (2005) membahas kontrol optimal inventori dengan memperhatikan produk yang rusak. Hedjar dkk (2007) membahas kontrol optimal

model inventori periodik dengan mengasumsikan tingkat kerusakan produk adalah konstan.

Pada penelitian ini, permasalahan inventori akan diselesaikan dengan memperhatikan tingkat kerusakan produk. Dengan perusahaan menentukan banyaknya inventori yang diinginkan dan banyaknya produksi yang diinginkan maka akan dihitung biaya penaltinya yaitu biaya yang muncul ketika keduanya menyimpang dari yang diinginkan (*goal rates*). Sistem inventori diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Dari penyelesaian tersebut didapatkan keputusan optimal untuk mengatur inventori. Pada bagian akhir, solusi yang diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab dengan tujuan untuk mengetahui grafik fungsi inventori dan fungsi produksi mengikuti *goal rates*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji dalam tesis ini sebagai berikut.

1. Bagaimana mengembangkan model sistem inventori dengan memperhatikan kerusakan produk dalam bentuk masalah kontrol optimal.
2. Bagaimana menentukan produksi dan inventori yang optimal dari model sistem inventori dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Bagaimana analisa simulasi grafik fungsi inventori, fungsi produksi, dan fungsi biaya penalti setelah dilakukan kontrol optimal dengan menggunakan *software* Matlab.

1.3 Batasan Masalah

Penulisan tesis ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Perusahaan menentukan banyaknya inventori yang diinginkan dan banyaknya produksi yang diinginkan.
2. Produk yang diproduksi adalah sejenis.
3. Tingkat kerusakan terjadi setelah produk masuk dalam inventori (gudang penyimpanan).

4. Tidak ada perbaikan pada produk yang rusak.
5. Semua permintaan konsumen dapat dipenuhi.
6. Adanya biaya penalti yaitu biaya yang dikenakan apabila banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi menyimpang dari yang diinginkan.
7. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model inventori kontinu.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengembangkan model sistem inventori produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dalam bentuk masalah kontrol optimal.
2. Menentukan produksi dan inventori yang optimal dari model sistem inventori produksi dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Menganalisa simulasi grafik fungsi inventori, fungsi produksi, dan fungsi biaya penalti setelah dilakukan kontrol optimal dengan menggunakan *software* Matlab.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memberikan informasi untuk penelitian selanjutnya tentang kontrol optimal sistem inventori.
2. Memberikan informasi kepada perusahaan produksi bahwa dengan mengetahui banyaknya permintaan dapat ditentukan banyaknya persediaan dan banyaknya barang yang harus diproduksi agar perusahaan tidak menanggung kerugian.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Model Sistem Inventori

Persediaan atau inventori dalam konteks produksi, dapat diartikan sebagai sumber daya menganggur (*idle resource*). Sumber daya menganggur ini belum digunakan karena menunggu proses lebih lanjut. Keberadaan sumber daya menganggur ini dalam suatu sistem mempunyai alasan tertentu. Alasan utamanya adalah karena sumber daya tertentu tidak bisa didatangkan ketika sumber daya tersebut dibutuhkan. Sehingga, untuk menjamin tersedianya sumber daya tersebut perlu adanya persediaan yang siap digunakan ketika dibutuhkan (Ginting, 2007).

Keuntungan melakukan inventori yaitu: yang pertama adalah perusahaan dapat segera memenuhi permintaan konsumen; yang kedua adalah penggunaan gudang untuk menyimpan kelebihan produksi selama periode sedikitnya permintaan konsumen untuk dijual pada periode tingginya permintaan konsumen (Sethi & Thompson, 2000).

Pengendalian pengadaan persediaan perlu diperhatikan karena berkaitan langsung dengan biaya yang harus ditanggung perusahaan sebagai akibat adanya persediaan. Oleh sebab itu, persediaan yang ada harus seimbang dengan kebutuhan, karena persediaan yang terlalu banyak akan mengakibatkan perusahaan menanggung risiko kerusakan dan biaya penyimpanan yang tinggi di samping biaya investasi yang besar. Tetapi jika terjadi kekurangan persediaan akan berakibat terganggunya kelancaran dalam proses produksinya (Ristono, 2009).

Sebuah perusahaan memproduksi produk yang homogen dan mempunyai gudang penyimpanan. Berikut ini adalah model inventori kontinu:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t)) \quad (2.1)$$

dengan notasi yang didefinisikan sebagai berikut:

$I(t)$: banyaknya inventori pada waktu t
 $P(t)$: banyaknya produksi pada waktu t

$D(t)$: banyaknya permintaan pada waktu t

$\theta(t, I(t))$: banyaknya barang yang rusak pada waktu t

(Bounkhel & Tadj, 2005).

Dari persamaan (2.1) dapat diformulasikan permasalahan kontrol optimal dengan satu variabel *state* yaitu banyaknya inventori ($I(t)$) dan satu variabel kontrol yaitu banyaknya produksi ($P(t)$) untuk $t \geq 0$. Permasalahan tersebut adalah untuk meminimumkan fungsi tujuan yaitu sebagai berikut:

$$\min_{P(t) \geq 0} J(P, I) = \int_0^T F(t, I(t), P(t)) dt \quad (2.2)$$

dengan

$$F(t, I(t), P(t)) = e^{-\rho t} \left\{ \frac{h}{2} [I(t) - \hat{I}]^2 + \frac{K}{2} [P(t) - \hat{P}]^2 \right\},$$

dan $I(0) = I_0, P(T) = \hat{P}, P(t) \geq 0$

dengan notasi sebagai berikut:

T : waktu perencanaan produksi

ρ : tingkat diskon (konstan tak negatif)

I_0 : banyaknya inventori saat $t = 0$

h : biaya penalti penyimpanan

K : biaya penalti produksi

\hat{I} : banyaknya inventori yang diinginkan

$\hat{P}(t)$: banyaknya produksi yang diinginkan pada waktu t .

Fungsi obyektif (2.2) adalah menghitung besarnya biaya penalti yang dikenakan ketika banyaknya inventori dan banyaknya produksi menyimpang dari yang diinginkan (*goal level*). Nilai $\frac{1}{2}$ menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan tingkat kepentingan dari biaya-biaya penalti adalah sama. Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan dengan Prinsip Maksimum Pontryagin (Bounkhel & Tadj, 2005).

2.2 Biaya-Biaya Inventori

Tujuan dari manajemen persediaan adalah memiliki persediaan dalam banyaknya yang tepat, pada waktu yang tepat, dan dengan biaya yang rendah. Karena itu, kebanyakan model-model persediaan menjadikan biaya sebagai

parameter dalam mengambil keputusan. Biaya dalam sistem persediaan secara umum dapat diklasifikasikan sebagai berikut:

1. Biaya pembelian (*Purchasing cost*)

Biaya pembelian dari suatu item adalah harga pembelian setiap unit item jika item tersebut berasal dari sumber eksternal atau biaya produksi perunit bila item tersebut berasal dari internal perusahaan atau diproduksi sendiri oleh perusahaan.

2. Biaya pengadaan (*Procurement cost*)

Biaya pengadaan dibedakan atas 2 jenis sesuai asal-usul barang, yaitu biaya pemesanan (*ordering cost*) bila barang yang diperlukan diperoleh dari pihak luar (*supplier*) dan biaya pembuatan (*setup cost*) bila barang diperoleh dengan memproduksi sendiri.

- a. Biaya pemesanan

Biaya ini pada umumnya meliputi pemrosesan pesanan, biaya ekspedisi, biaya telepon, pengeluaran surat menyurat dan foto kopi, biaya pengepakan dan penimbangan, biaya pemeriksaan penerimaan, biaya pengiriman ke gudang, dan sebagainya.

- b. Biaya pembuatan

Biaya ini meliputi biaya menyetel mesin, biaya mempersiapkan gambar benda kerja, dan sebagainya.

3. Biaya penyimpanan (*Carrying cost*)

Biaya penyimpanan merupakan biaya yang timbul akibat disimpannya suatu item. Biaya penyimpanan terdiri dari biaya-biaya yang bervariasi secara langsung dengan kuantitas persediaan. Biaya-biaya yang termasuk sebagai biaya penyimpanan adalah biaya memiliki persediaan, biaya gudang, biaya kerusakan, biaya kadaluarsa, biaya asuransi, serta biaya administrasi dan pemindahan.

4. Biaya kekurangan persediaan (*Shortage cost*)

Biaya ini timbul jika persediaan tidak mencukupi permintaan produk atau kebutuhan bahan. Biaya-biaya yang termasuk biaya kekurangan persediaan adalah kehilangan penjualan, kehilangan langganan, biaya pemesanan khusus, terganggunya proses produksi, tambahan pengeluaran kegiatan manajerial, dan sebagainya.

5. Biaya sistematis

Biaya ini meliputi biaya perancangan dan perencanaan sistem persediaan serta ongkos-ongkos untuk mengadakan peralatan (misalnya komputer) serta melatih tenaga yang digunakan untuk mengoperasikan sistem produksi (Ginting, 2007).

2.3 Kontrol Optimal

Tujuan utama dari permasalahan kontrol optimal yaitu untuk mencari nilai kontrol yang akan dimasukkan ke dalam model atau sistem dan memenuhi kendala. Pada waktu yang sama, dapat ditentukan nilai yang optimal (yaitu maksimum atau minimum) berdasarkan fungsi tujuan (fungsi obyektif). Formulasi masalah kontrol optimal terdiri dari deskripsi secara matematis suatu model atau sistem, menentukan fungsi tujuan dan kendala atau syarat batas yang berlaku. Pada umumnya fungsi obyektif pada masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai berikut

$$J(u(t)) = S(\mathbf{x}(t_f, t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.3)$$

dengan sistem (*plant*) dinyatakan oleh persamaan berikut,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.4)$$

serta kondisi batas

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f.$$

Kontrol $\mathbf{u}^*(t)$ merupakan kontrol optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem (2.4) akan diperoleh *state* yang optimal $\mathbf{x}^*(t)$ dan pada saat yang sama mengoptimalkan fungsi obyektif (2.3) yang kemudian dinotasikan dengan $J(u^*(t))$ atau J^* . *State* optimal $\mathbf{x}^*(t)$ dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal (\mathbf{x}_0) dan kondisi akhir (\mathbf{x}_f).

Fungsi obyektif $J(u(t))$ pada persamaan (2.3) secara umum dapat dinyatakan sebagai bentuk Bolza. Pada saat $S = 0$ maka persamaan (2.3) disebut bentuk Lagrange, sedangkan pada saat $V = 0$ persamaan (2.3) disebut bentuk

Meyer. Dengan waktu akhir tetap atau bebas, dan keadaan (*state*) akhir seluruhnya atau sebagian bebas atau tetap (Naidu, 2002).

2.4 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip maksimum digunakan untuk memperoleh kontrol terbaik pada sistem dinamik dari *state* awal hingga *state* akhir, yaitu dengan memaksimalkan indeks performansi dengan kontrol $u(t)$ terbatas pada ($u(t) \in U$). Permasalahan ini telah dikembangkan oleh L. S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1956 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi. Sehingga, prinsip ini disebut Prinsip Maksimum Pontryagin (Naidu, 2002).

Menurut Bryson dan Ho (1975), Prinsip Maksimum Pontryagin menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimalkan sepanjang U yang merupakan himpunan kontrol yang mungkin (Bryson & Ho, 1975). Hasilnya juga dapat dinamakan Prinsip Minimum Pontryagin karena mempunyai pengertian yang sama antara meminimalkan dan memaksimalkan dengan mengalikan (-1) pada indeks performansi. Langkah-langkah menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut.

Diberikan persamaan *state* (2.4) dimana $\dot{\mathbf{x}}$ merupakan vektor yang merepresentasikan sistem, fungsi obyektif (2.3), dan kondisi batas $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$. Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

Langkah 1 : membentuk fungsi Pontryagin

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}'(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

Langkah 2 : meminimumkan H terhadap semua vektor kontrol $\mathbf{u}(t)$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)_* = 0$$

dan diperoleh

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t)$$

Langkah 3 : menggunakan hasil dari langkah 2 ke dalam langkah 1 dan menentukan H^* yang optimal.

$$H^*(t)(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = H^*(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t)$$

Langkah 4 : menyelesaikan sekumpulan $2n$ persamaan

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)_*$$

dengan kondisi awal \mathbf{x}_0 dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0$$

Langkah 5 : untuk memperoleh kontrol optimal, solusi $\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 disubstitusikan ke dalam ekspresi kontrol optimal \mathbf{u}^* pada langkah 2 (Naidu, 2002).

BAB 3

METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang digunakan untuk mencapai tujuan penelitian.

1. Studi Literatur

Pada tahap ini, dikumpulkan berbagai informasi tentang inventori, biaya-biaya inventori, kontrol optimal, prinsip maksimum Pontryagin, metode beda hingga, dan hal lain yang berkaitan dengan penelitian ini. Berbagai informasi tersebut didapatkan dari berbagai sumber pustaka yaitu buku, jurnal, dan internet.

2. Mengembangkan model

Pada tahap ini dilakukan pengembangan model sistem inventori pada persamaan (2.1). Model sistem inventori yang dikonstruksi merupakan model sistem inventori yang memperhatikan tingkat kerusakan barang yaitu $\theta(t)$.

3. Menentukan formulasi masalah kontrol optimal

Pada tahap ini, ditentukan formulasi masalah kontrol optimal yang meliputi sistem inventori, fungsi obyektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

4. Menyelesaikan permasalahan kontrol optimal

Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian kontrol optimal. Metode yang digunakan dalam penyelesaian kontrol optimal ini adalah Prinsip Maksimum Pontryagin.

5. Pembuatan Program Simulasi

Pada tahap ini, dicari solusi dari permasalahan kontrol optimal yaitu meminimumkan biaya penalti total. Dengan memanfaatkan persamaan sistem, fungsi obyektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi, maka dibuat simulasi berupa grafik fungsi permintaan, fungsi produksi, fungsi inventori, dan biaya penalti total dengan menggunakan *software* Matlab. Beberapa parameter akan dijadikan sebagai masukan pada

program simulasi. Parameter-parameter tersebut adalah T (waktu rencana produksi), ρ (tingkat diskon), I_0 (banyaknya inventori awal), h (biaya penalti penyimpanan), K (biaya penalti produksi), $\theta(t)$ (tingkat kerusakan), \hat{I} (banyaknya inventori yang diinginkan), dan $D(t)$ (fungsi permintaan).

6. Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini, dilakukan analisis dan pembahasan terhadap hasil dari running simulasi yang berupa grafik fungsi permintaan, fungsi produksi, fungsi inventori, dan biaya penalti total. Dengan mengubah parameter-parameter pada program simulasi, maka akan dianalisis bagaimana perubahan grafik tersebut.

7. Publikasi Artikel

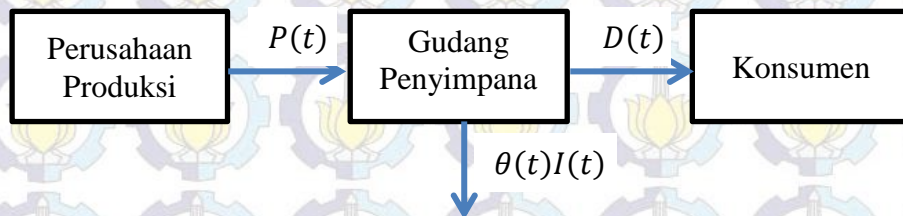
8. Penyusunan Tesis

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pengembangan Model Inventori dengan Kerusakan Produk

Sebuah perusahaan memproduksi sebuah produk dan diasumsikan bahwa waktu perencanaan produksi yaitu T . Pada penelitian ini, dilakukan pengembangan model sistem inventori pada persamaan (2.1). model sistem inventori yang dikembangkan merupakan model sistem inventori yang memperhatikan tingkat kerusakan barang. Model sistem inventori ini dapat diilustrasikan berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Diagram kompartemen model sistem inventori

Diasumsikan produk mengalami kerusakan pada gudang penyimpanan dengan tingkat kerusakan yaitu $\theta(t)$, untuk $0 \leq t \leq T$. Kerusakan produk erat kaitannya dengan inventori, dimana kerusakan produk menyebabkan banyaknya inventori berkurang. Model ini terdiri dari satu variabel kontrol yaitu banyaknya produksi dan satu variabel *state* yaitu banyaknya inventori. Berikut ini adalah model inventori produksi dengan kerusakan produk:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t)I(t) \quad (4.1)$$

Semua fungsi diasumsikan sebagai fungsi yang *differentiable* dan kontinu.

Karena permintaan terjadi pada $D(t)$, produksi terjadi pada $P(t)$, dan kerusakan produk terjadi pada $\theta(t)I(t)$, sehingga persamaan (4.1) merupakan persamaan dinamik inventori produksi. Pada persamaan tersebut, $P(t)$, $D(t)$, $I(t)$, dan $\theta(t)$ adalah fungsi terhadap waktu. Laju banyaknya inventori bergantung pada banyaknya produksi, banyaknya permintaan konsumen, dan tingkat kerusakan produk. Jika banyaknya produksi tinggi maka laju banyaknya inventori juga

meningkat dan sebaliknya. Jika permintaan konsumen meningkat maka laju banyaknya inventori menurun dan sebaliknya. Untuk mendapatkan fungsi obyektif dari persamaan tersebut, diasumsikan bahwa perusahaan menentukan banyaknya inventori yang diinginkan dan banyaknya produksi yang diinginkan. Biaya penalti terjadi jika banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi menyimpang dari yang diinginkan.

Model dikatakan sebagai permasalahan kontrol optimal dengan fungsi obyektif.

$$\min_{P(t) \geq 0} J(P, I) = \int_0^T F(t, I(t), P(t)) dt \quad (4.2)$$

dengan

$$F(t, I(t), P(t)) = \frac{1}{2} e^{-\rho t} \{h[I(t) - \hat{I}]^2 + K[P(t) - \hat{P}(t)]^2\} \quad (4.3)$$

dengan kondisi batas

$$I(0) = I_0, \quad I(T) = \hat{I}, \quad P(T) = \hat{P}(T), \quad P(t) \geq 0 \quad (4.4)$$

dengan

$I(t)$: banyaknya inventori pada waktu t

$P(t)$: banyaknya produksi pada waktu t

$D(t)$: banyaknya permintaan pada waktu t

$\theta(t)$: tingkat kerusakan (*deterioration rate*) pada waktu t

h : biaya penalti penyimpanan

K : biaya penalti produksi

T : waktu perencanaan produksi

ρ : tingkat diskon

I_0 : banyaknya inventori pada $t = 0$

\hat{I} : banyaknya inventori yang diinginkan

$\hat{P}(t)$: banyaknya produksi yang diinginkan pada waktu t

Fungsi obyektif pada persamaan (4.2) adalah menghitung besarnya biaya penalti yang dikenakan ketika banyaknya inventori dan banyaknya produksi menyimpang dari yang diinginkan. Nilai $\frac{1}{2}$ menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan tingkat kepentingan dari biaya-biaya penalti adalah sama. Masalah

optimal kontrol tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

4.2 Penyelesaian Kontrol Optimal

Digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal pada persamaan (4.2). Prinsip Maksimum Pontryagin melibatkan fungsi Hamiltonian sebagai berikut.

$$H(t, I(t), P(t), \lambda(t)) = -F(t, I(t), P(t)) + \lambda(t)f(t, I(t), P(t)) \quad (4.5)$$

Dimana $f(t, I(t), P(t)) = P(t) - D(t) - \theta(t)I(t)$ dan λ adalah fungsi adjoint yang berhubungan dengan kendala persamaan diferensial. Diasumsikan (P^*, I^*) adalah solusi optimal pada permasalahan kontrol optimal ini, kemudian

$$H(t, I^*(t), P^*(t), \lambda(t)) \geq H(t, I(t), P(t), \lambda(t)), \text{ untuk } \forall P(t) \geq 0 \quad (4.6)$$

Persamaan *state*-nya adalah sebagai berikut

$$\frac{d}{dt}I(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} H(t, I^*(t), P^*(t), \lambda(t)) \quad (4.7)$$

Persamaan *co-state*-nya adalah sebagai berikut

$$-\frac{d}{dt}\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial I} H(t, I^*(t), P^*(t), \lambda(t)) \quad (4.8)$$

Persamaan (4.5) dapat dinyatakan menjadi persamaan (4.9) sebagai berikut.

$$H(t, I(t), P(t), \lambda(t)) = -\frac{1}{2}e^{-\rho t} \left\{ h[I(t) - \hat{I}]^2 + K[P(t) - \hat{P}(t)]^2 \right\} + \lambda(t)(P(t) - D(t) - \theta(t)I(t)) \quad (4.9)$$

Sehingga pertidaksamaan (4.6) ekuivalen dengan $\frac{\partial}{\partial P} H(t, I^*(t), P^*(t), \lambda(t))$ dapat dinyatakan menjadi persamaan (4.10) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} H(t, I^*(t), P^*(t), \lambda(t)) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial P} H(t, I^*(t), P^*(t), \lambda(t)) &= -e^{-\rho t} [P(t) - \hat{P}(t)]K + \lambda(t) = 0 \\ \lambda(t) &= e^{-\rho t} [P(t) - \hat{P}(t)]K \end{aligned} \quad (4.10)$$

Persamaan (4.10) dapat dinyatakan menjadi persamaan (4.11) sebagai berikut.

$$P(t) = \frac{\lambda(t)}{K} e^{\rho t} + \hat{P}(t) \quad (4.11)$$

Persamaan (4.8) dapat dinyatakan menjadi persamaan (4.12) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\lambda(t) &= \frac{\partial}{\partial I}H(t, I^*(t), P^*(t), \lambda(t)) \\
\frac{\partial}{\partial I}H(t, I^*(t), P^*(t), \lambda(t)) &= -e^{-\rho t}[I(t) - \hat{I}]h - \theta(t)\lambda(t) \\
\frac{d}{dt}\lambda(t) &= e^{-\rho t}[I(t) - \hat{I}]h + \theta(t)\lambda(t)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (4.11) ke persamaan (4.1) didapatkan

$$\frac{d}{dt}I(t) = \frac{\lambda(t)}{K}e^{\rho t} + \hat{P}(t) - D(t) - \theta(t)I(t) \tag{4.13}$$

Dari persamaan (4.13) didapatkan

$$\frac{\lambda(t)}{K} = e^{-\rho t}[I(t) - \hat{P}(t) + D(t) + \theta(t)I(t)] \tag{4.14}$$

dan

$$\dot{I}(t) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{K}e^{\rho t} + \rho \frac{\lambda(t)}{K}e^{\rho t} + \dot{\hat{P}}(t) - \dot{D}(t) - \dot{\theta}(t)I(t) - \theta(t)\dot{I}(t) \tag{4.15}$$

Substitusikan persamaan (4.12) ke persamaan (4.15) dan didapatkan

$$\dot{I}(t) = \frac{e^{-\rho t}[I(t) - \hat{I}]h + \theta(t)\lambda(t)}{K}e^{\rho t} + \rho \frac{\lambda(t)}{K}e^{\rho t} + \dot{\hat{P}}(t) - \dot{D}(t) - \dot{\theta}(t)I(t) - \theta(t)\dot{I}(t) \tag{4.16}$$

Substitusikan persamaan (4.14) ke persamaan (4.16)

$$\begin{aligned}
\dot{I}(t) &= [I(t) - \hat{I}] \frac{h}{K} + \theta(t)[I(t) - \hat{P}(t) + D(t) + \theta(t)I(t)] \\
&\quad + \rho[I(t) - \hat{P}(t) + D(t) + \theta(t)I(t)] + \dot{\hat{P}}(t) - \dot{D}(t) \\
&\quad - \dot{\theta}(t)I(t) - \theta(t)\dot{I}(t)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Berdasarkan asumsi bahwa semua permintaan konsumen dapat dipenuhi, maka banyaknya produksi yang diinginkan merupakan jumlahan dari banyaknya permintaan konsumen dan banyaknya produk yang rusak pada gudang penyimpanan. Banyaknya produksi yang diinginkan dapat dinyatakan dengan persamaan $\hat{P}(t) = D(t) + \theta(t)\hat{I}$.

Sehingga persamaan (4.17) menjadi

$$\begin{aligned}
\dot{I}(t) &= \rho \dot{I}(t) + \left(\frac{h}{K} + \theta(t)^2 + \rho\theta(t) - \dot{\theta}(t) \right) I(t) - \frac{h}{K}\hat{I} - \theta(t)^2\hat{I} \\
&\quad - \rho\theta(t)\hat{I} + \dot{\theta}(t)\hat{I}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Dengan menerapkan kondisi awal yaitu $I(0) = I_0$, dan kondisi akhir yaitu $P(T) = \hat{P}(T)$, akan didapatkan solusi optimal yang nilainya bergantung pada bentuk fungsi permintaannya.

Persamaan (4.18) merupakan persamaan diferensial orde dua. Dengan menggunakan kondisi batas (4.4) maka akan diperoleh fungsi inventori $I(t)$. Persamaan tersebut tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga dilakukan perhitungan numerik dengan metode beda hingga.

Langkah untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, yaitu pertama untuk periode waktu $[0, T]$, dipilih $N > 0$ dan membagi interval tersebut menjadi subinterval dengan titik akhir adalah titik *mesh* $x_i = a + ih_a$ untuk $i = 0, 1, \dots, N + 1$, dan $h_a = (b - a)/(N + 1)$. Dengan memilih rentang h_a , digunakan algoritma matriks untuk penyelesaian sebuah sistem linear dengan ukuran matriks $N \times N$.

Misalkan suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 10 bulan ($T = 10$), dengan suku bunga adalah 1% perbulan ($\rho = 0.01$), dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 4 unit ($I_0 = 4$). Biaya penalti yang akan ditanggung perusahaan jika banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi jauh dari yang diinginkan terdiri dari dua biaya yaitu *holding cost* sebesar 1 ($h = 1$) dan biaya produksi sebesar 1 ($K = 1$). Banyaknya inventori yang diinginkan adalah tetap, yaitu sebesar 10 ($\hat{I} = 10$), sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan berupa fungsi $\theta(t) = 0.01 + 0.001t$.

Dari permasalahan tersebut, dipilih $h_a = 0,1$ menghasilkan sistem dari persamaan di atas dalam bentuk matriks tridagonal A dengan ukuran 100×100 , dan matriks b dengan ukuran 100×1 berikut

$$Aw = b,$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} 2,0098 & -0,9995 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1,0005 & 2,0098 & -0,9995 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1,0005 & 2,0098 & -0,9995 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1,0005 & 2,0098 & -0,9995 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0005 & 2,0098 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix},$$

dan

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4,1000 \\ 0,0980 \\ \vdots \\ 0,0980 \\ 0,0980 \\ 10,0931 \end{bmatrix}$$

Karena elemen-elemen matriks \mathbf{A} dan \mathbf{b} sudah diketahui, maka vektor solusi $\mathbf{w} = I(t)$ yang mempunyai ukuran 100×1 dapat ditentukan dengan menggunakan metode eliminasi *Gauss*. Solusi optimal untuk banyaknya inventori yaitu dapat dilihat pada simulasi numerik sub bab 4.3.

4.3.1 Menentukan Produksi Optimal

Terdapat langkah-langkah untuk menentukan produksi yang optimal secara analitik. Langkah pertama adalah dari persamaan (4.18) dapat dinyatakan menjadi persamaan (4.19) yaitu sebagai berikut

$$\ddot{I}(t) - \rho \dot{I}(t) - \left(\frac{h}{K} + \theta(t)^2 + \rho \theta(t) - \dot{\theta}(t) \right) I(t) = \beta(t) \quad (4.19)$$

dimana

$$\beta(t) = -\frac{h}{K} \hat{I} - \theta(t)^2 \hat{I} - \rho \theta(t) \hat{I} + \dot{\theta}(t) \hat{I}$$

Dengan kondisi batas (4.4), permasalahan (4.19) dapat dikatakan sebagai *two-point boundary value problem*. Hal tersebut dikarenakan terdapat dua kondisi batas yaitu kondisi awal ($I(0) = I_0$) dan kondisi akhir ($P(T) = \hat{P}$).

Penyelesaian persamaan (4.19) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode persamaan karakteristik yaitu

$$m^2 - \rho m - \left(\frac{h}{K} + \theta(t)^2 + \rho \theta(t) - \dot{\theta}(t) \right) = 0$$

Dari persamaan karakteristik tersebut, didapatkan dua akar dengan tanda yang berlawanan yaitu

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4 \left(\frac{h}{K} + \theta(t)^2 + \rho\theta(t) - \dot{\theta}(t) \right)} \right) < 0,$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left(\rho + \sqrt{\rho^2 + 4 \left(\frac{h}{K} + \theta(t)^2 + \rho\theta(t) - \dot{\theta}(t) \right)} \right) > 0,$$

Sehingga didapatkan

$$I(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q_1(t) \quad (4.20)$$

Dimana $Q_1(t)$ merupakan solusi partikular dari persamaan (4.19). Kondisi batas (4.4) digunakan untuk menentukan konstanta a_1 dan a_2 . Dari kondisi awal didapatkan

$$I_0 = a_1 + a_2 + Q_1(0)$$

Dan dari kondisi akhir yaitu $P(T) = \hat{P}(T)$, dimana $P(t) = \dot{I}(t) + D(t) + \theta(t)I(t)$, maka didapatkan

$$P(T) = a_1 m_1 e^{m_1 T} + a_2 m_2 e^{m_2 T} + \dot{Q}_1(T) + D(T) + \theta(T) a_1 e^{m_1 T} + \theta(T) a_2 e^{m_2 T} + \theta(T) Q_1(T)$$

$$\hat{P}(T) = a_1 (\theta(T) + m_1) e^{m_1 T} + a_2 (\theta(T) + m_2) e^{m_2 T} + \dot{Q}_1(T) + D(T) + \theta(T) Q_1(T)$$

$$0 = a_1 (\theta(T) + m_1) e^{m_1 T} + a_2 (\theta(T) + m_2) e^{m_2 T} + \dot{Q}_1(T) + D(T) + \theta(T) Q_1(T) - \hat{P}(T)$$

Dengan memisalkan nilai b_1 dan b_2 yaitu

$$b_1 = I_0 - Q_1(0)$$

$$b_2 = \hat{P}(T) - \dot{Q}_1(T) - D(T) - \theta(T) Q_1(T),$$

akan diperoleh sistem dua persamaan linier berikut ini

$$a_1 + a_2 = b_1$$

$$a_1 (\theta(T) + m_1) e^{m_1 T} + a_2 (\theta(T) + m_2) e^{m_2 T} = b_2$$

yaitu yang mempunyai solusi tunggal

$$a_1 = \frac{b_2 - (\theta(T) + m_2) e^{m_2 T} b_1}{(\theta(T) + m_1) e^{m_1 T} - (\theta(T) + m_2) e^{m_2 T}},$$

$$a_2 = \frac{(\theta(T) + m_1)e^{m_1 T} b_1 - b_2}{(\theta(T) + m_1)e^{m_1 T} - (\theta(T) + m_2)e^{m_2 T}},$$

Pernyataan P disimpulkan dengan menggunakan pernyataan optimal dari I dengan persamaan (4.1). Karena optimal dari P atau disebut juga P^* adalah positif, jadi

$$P^*(t) = \max \{P(t), 0\} \quad (4.21)$$

dimana

$$P(t) = a_1 m_1 e^{m_1 t} + a_2 m_2 e^{m_2 t} + \dot{Q}_1(t) + D(t) + \theta a_1 e^{m_1 t} + \theta(t) a_2 e^{m_2 t} + \theta(t) Q_1(t) \quad (4.22)$$

4.3.2 Menentukan Inventori Optimal

Banyaknya inventori yang optimal atau dapat dinyatakan sebagai $I^*(t)$ ditentukan secara langsung dari persamaan (4.1) yaitu sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I^*(t) &= P^*(t) - D(t) - \theta(t) I^*(t) \\ \frac{d}{dt} I^*(t) + \theta(t) I^*(t) &= P^*(t) - D(t) \end{aligned}$$

Misalkan $Q_2(t) = P^*(t) - D(t)$, maka penyelesaian persamaan tersebut adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I^*(t) + \theta(t) I^*(t) &= 0 \\ \int \frac{1}{I^*(t)} \frac{d}{dt} I^*(t) + \int \theta(t) dt &= \int 0 \\ \ln I^*(t) + \int \theta(t) dt &= \ln c_1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$I^*(t) = c_1 e^{-\int \theta(t) dt} \quad (4.24)$$

dimana c_1 adalah kostanta sembarang. Pandang c_1 sebagai fungsi dari t , dan akan dicari sehingga persamaan (4.24) merupakan penyelesaian persamaan (4.1).

Persamaan (4.23) diturunkan terhadap t , sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{I^*(t)} \frac{dI^*(t)}{dt} + \theta(t) &= \frac{1}{c_1} \frac{dc_1}{dt} \\ \frac{dI^*(t)}{dt} + \theta(t) I^*(t) &= \frac{I^*(t)}{c_1} \frac{dc_1}{dt} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Bagian kiri dari persamaan (4.25) sama dengan bagian kanan persamaan (4.1) yaitu $Q_2(s)$, maka

$$\frac{I^*(s)}{c_1} \frac{dc_1}{ds} = Q_2(s) \quad (4.26)$$

Substitusikan persamaan (4.24) ke persamaan (4.26), sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{c_1 e^{-\int \theta(s) ds}}{c_1} \frac{dc_1}{dt} &= Q_2(s) \\ dc_1 &= e^{\int \theta(s) ds} Q_2(s) ds \\ c_1 &= \int_0^t e^{\int \theta(s) ds} Q_2(s) ds + c_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Persamaan (4.27) disubstitusikan ke persamaan (4.24) sehingga menjadi

$$I^*(t) = \left(\int_0^t e^{\int \theta(s) ds} Q_2(s) ds + c_2 \right) e^{-\int \theta(t) dt}$$

$$I^*(t) = c_2 e^{-\int \theta(t) dt} + \int_0^t (P^*(s) - D(s)) e^{\theta(s-t)} ds$$

Karena kondisi awal $I(0) = I_0$, maka $c_2 = I_0$, sehingga didapatkan

$$I^*(t) = I_0 e^{-\int \theta(t) dt} + \int_0^t (P^*(s) - D(s)) e^{\theta(s-t)} ds \quad (4.28)$$

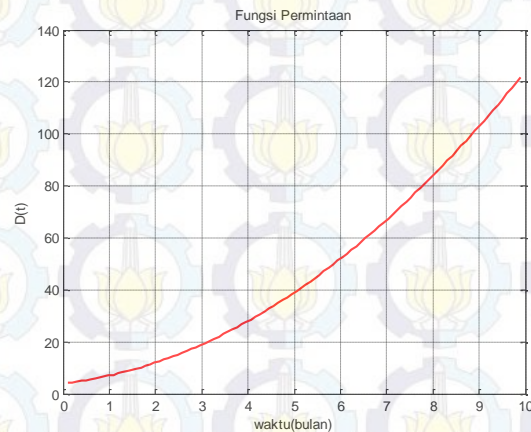
4.3 Simulasi Numerik

Simulasi numerik pada permasalahan kontrol optimal menggambarkan pengaruh beberapa parameter terhadap nilai fungsi obyektif pada persamaan (4.2). Simulasi numerik ini menggunakan *software* Matlab. Dengan menerapkan kondisi batas (4.4) dan menggunakan metode beda hingga (*finite difference method*) maka didapatkan solusi optimal yang nilainya bergantung pada bentuk fungsi permintaan konsumen.

4.3.1 Permintaan konsumen meningkat

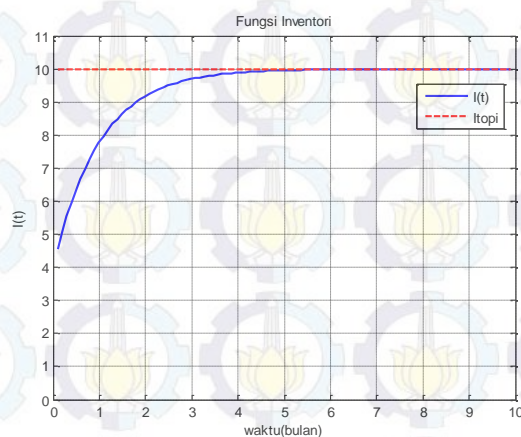
Misalkan untuk kasus pertama, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 10 bulan ($T = 10$), dengan suku bunga adalah 1% perbulan ($\rho = 0.01$), dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 4 unit ($I_0 = 4$). Biaya penalti yang akan ditanggung perusahaan jika banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi jauh dari yang diinginkan terdiri

dari dua biaya yaitu *holding cost* sebesar 1 ($h = 1$) dan biaya produksi sebesar 1 ($K = 1$). Banyaknya inventori yang diinginkan adalah tetap, yaitu sebesar 10 ($\hat{I} = 10$), sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan berupa fungsi $\theta(t) = 0.01 + 0.001t$. Permintaan konsumen yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi $D(t) = t^2 + 2t + 4$.

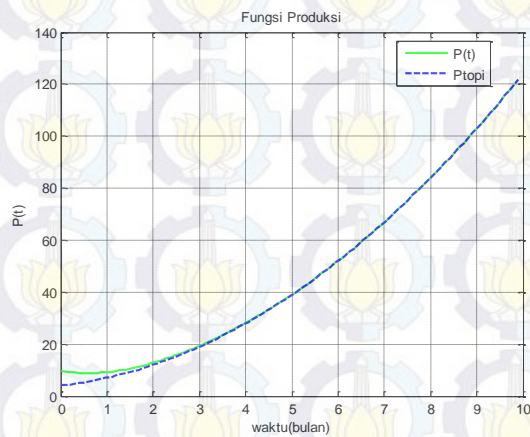


Gambar 4.2 Fungsi permintaan bentuk kuadrat

Gambar 4.2 menggambarkan grafik fungsi permintaan bentuk kuadrat. Grafik tersebut menunjukkan bahwa permintaan konsumen semakin meningkat terhadap fungsi waktu. Dengan permintaan yang digambarkan oleh grafik tersebut, didapatkan grafik fungsi inventori yang ditunjukkan oleh Gambar 4.3 dan grafik fungsi produksi yang ditunjukkan oleh Gambar 4.4.

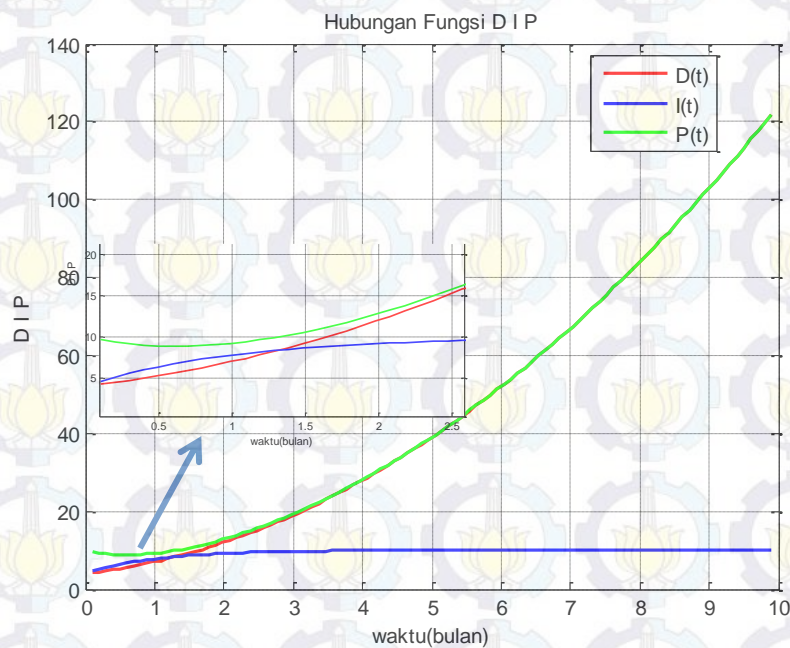


Gambar 4.3 Fungsi inventori kasus pertama



Gambar 4.4 Fungsi produksi kasus pertama

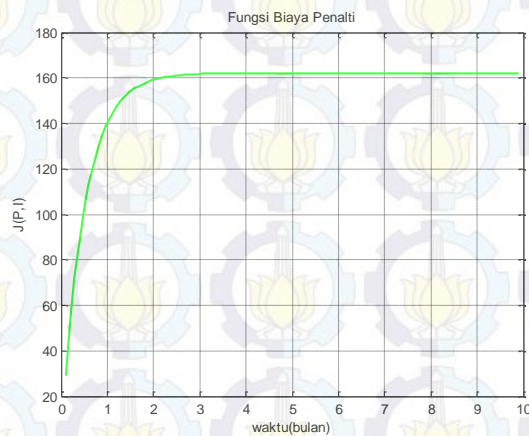
Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 menunjukkan bahwa banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi menuju yang diinginkan. Hal tersebut, membuat biaya penalti menjadi minimum. Hubungan antara $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ dapat dilihat pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus pertama

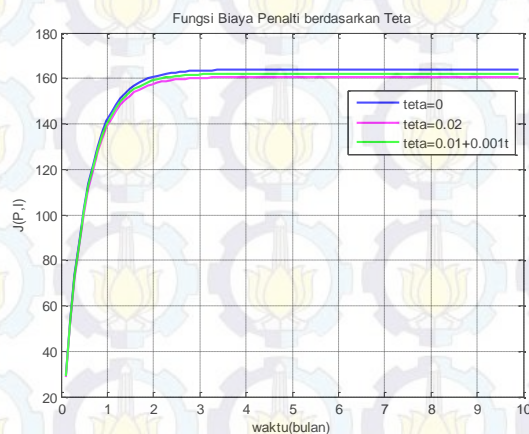
Gambar 4.5 menunjukan hubungan antara fungsi permintaan yang berbentuk persamaan kuadrat dengan banyaknya inventori yang optimal dan banyaknya produksi yang optimal. Gambar tersebut menunjukkan bahwa saat $t < 5,5$, grafik fungsi produksi di atas grafik fungsi permintaan sehingga

banyaknya inventori meningkat, sedangkan saat $t > 5,5$, grafik fungsi produksi sama dengan grafik fungsi permintaan, sehingga banyaknya inventori tetap. Banyaknya barang yang diproduksi dan banyaknya inventori mempengaruhi biaya penalti. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya penalti yang dijelaskan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Fungsi biaya penalti kasus pertama

Fungsi biaya penalti pada Gambar 4.6 menunjukkan bahwa pada selang waktu $0 < t < 5,5$ grafik meningkat, sedangkan pada $t \geq 5,5$ grafik menuju nilai yang tetap. Pada Gambar 4.7 dijelaskan pengaruh $\theta(t)$ pada grafik fungsi biaya penalti.



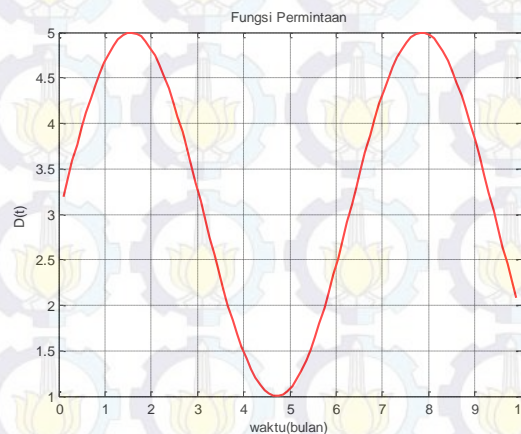
Gambar 4.7 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus pertama

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa terdapat perbedaan fungsi biaya penalti untuk $\theta(t)$ yang berbeda yaitu $\theta(t) = 0$ yang artinya tidak tingkat kerusakan pada inventori, $\theta(t) = 0,02$ yang artinya tingkat kerusakan adalah konstan

sebesar 0,02, $\theta(t) = 0,01 + 0,001t$ yang artinya tingkat kerusakan bergantung pada waktu. Pada Gambar tersebut, untuk $\theta(t) = 0$ menghasilkan biaya yang paling tinggi diantara ketiganya, sedangkan untuk $\theta(t) = 0,02$ menghasilkan biaya yang paling rendah.

4.3.2 Permintaan konsumen musiman

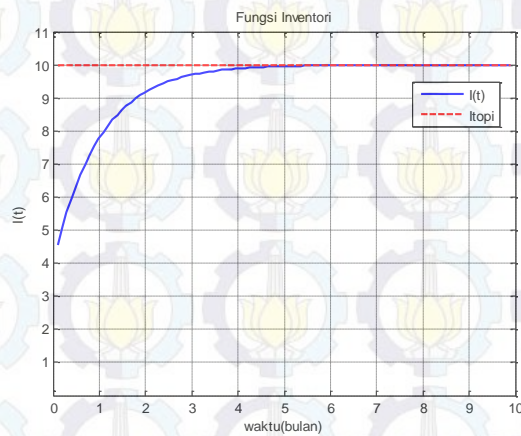
Misalkan untuk kasus kedua, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 10 bulan ($T = 10$), dengan suku bunga adalah 1% perbulan ($\rho = 0.01$), dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 4 unit ($I_0 = 4$). Biaya penalti yang akan ditanggung perusahaan jika banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi jauh dari yang diinginkan. terdiri dari dua biaya yaitu *holding cost* sebesar 1 ($h = 1$) dan biaya produksi sebesar 1 ($K = 1$). Banyaknya inventori yang diinginkan adalah tetap, yaitu sebesar 10 ($\hat{I} = 10$), sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan berupa fungsi $\theta(t) = 0.01 + 0.001t$. Permintaan konsumen yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi $D(t) = 2 \sin(t) + 3$.



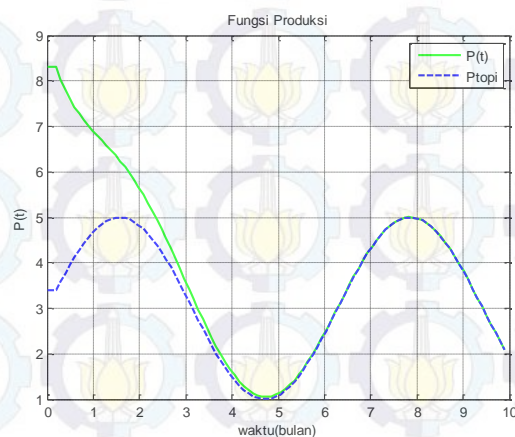
Gambar 4.8 Fungsi permintaan bentuk sinus

Gambar 4.8 menggambarkan grafik fungsi permintaan bentuk sinus. Grafik tersebut menunjukkan bahwa permintaan konsumen kadang meningkat dan menurun terhadap fungsi waktu. Permintaan tersebut dapat dikatakan sebagai permintaan musiman yaitu permintaan yang berulang setiap periode dikarenakan faktor cuaca, libur, atau kecenderungan perdagangan. Dengan permintaan yang digambarkan oleh grafik tersebut, didapatkan grafik fungsi inventori yang

ditunjukkan oleh Gambar 4.9 dan grafik fungsi produksi yang ditunjukkan oleh Gambar 4.10.

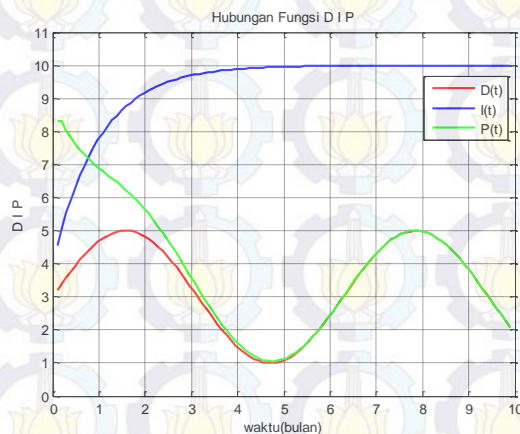


Gambar 4.9 Fungsi inventori pada kasus kedua



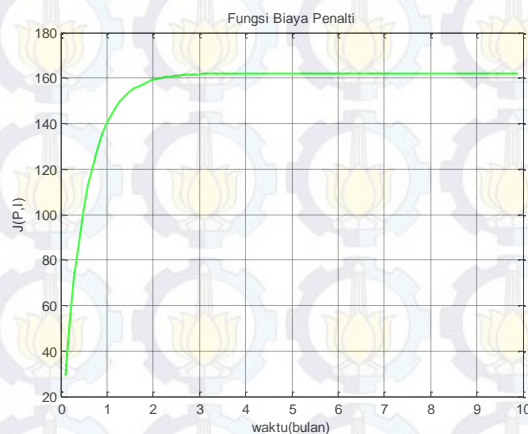
Gambar 4.10 Fungsi produksi pada kasus kedua

Gambar 4.9 dan Gambar 4.10 menunjukkan bahwa banyaknya inventori dan barang yang diproduksi menuju yang diinginkan. Hal tersebut, membuat biaya penalti menjadi minimum. Hubungan antara $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ dapat dilihat pada Gambar 4.11.



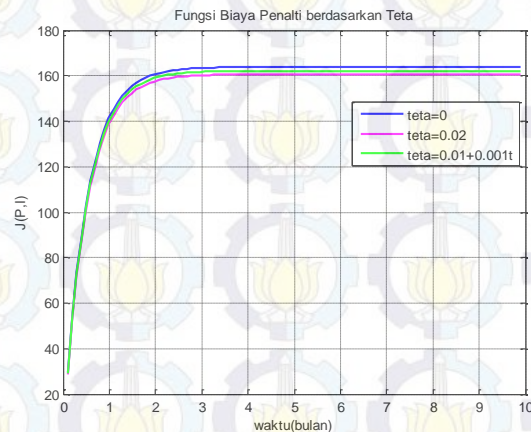
Gambar 4.11 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus kedua

Gambar 4.11 menunjukkan hubungan antara fungsi permintaan yang berbentuk persamaan sinus dengan banyaknya inventori yang optimal dan banyaknya produksi yang optimal. Gambar tersebut menunjukkan bahwa saat $t < 6$ grafik fungsi produksi diatas grafik fungsi permintaan, sehingga banyaknya inventori meningkat, sedangkan saat $t > 6$ grafik fungsi produksi sama dengan grafik fungsi permintaan, sehingga banyaknya inventori tetap. Banyaknya barang yang diproduksi dan banyaknya inventori mempengaruhi biaya penalti. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya penalti yang dijelaskan pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12 Fungsi biaya penalti kasus kedua

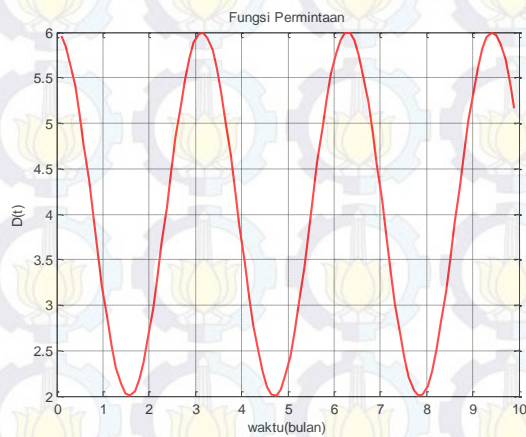
Fungsi biaya penalti pada Gambar 4.12 menunjukkan bahwa pada selang waktu $0 < t < 6$ grafik meningkat, sedangkan pada $t \geq 6$ grafik menuju nilai yang tetap. Pada Gambar 4.13 dijelaskan pengaruh $\theta(t)$ pada grafik biaya penalti.



Gambar 4.13 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus kedua

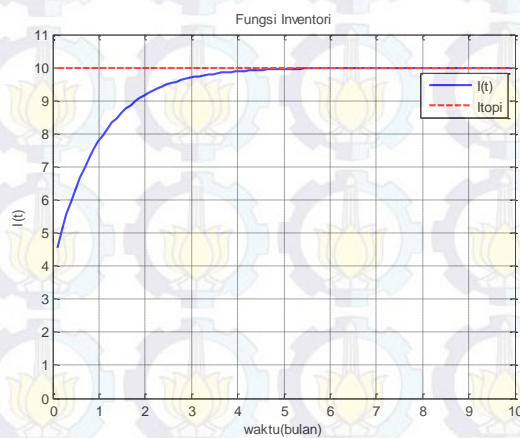
Gambar 4.13 menunjukkan bahwa terdapat perbedaan fungsi biaya penalti untuk $\theta(t)$ yang berbeda yaitu $\theta(t) = 0$ yang artinya tidak tingkat kerusakan pada inventori, $\theta(t) = 0,02$ yang artinya tingkat kerusakan adalah konstan sebesar 0,02, $\theta(t) = 0,01 + 0,001t$ yang artinya tingkat kerusakan bergantung pada waktu. Pada Gambar tersebut, untuk $\theta(t) = 0$ menghasilkan biaya yang paling tinggi diantara ketiganya, sedangkan untuk $\theta(t) = 0,02$ menghasilkan biaya yang paling rendah.

Misalkan untuk kasus ketiga suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 10 bulan ($T = 10$) dengan suku bunga adalah 1% perbulan ($\rho = 0.01$), dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 4 unit ($I_0 = 4$). Biaya penalti yang akan ditanggung perusahaan jika banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi jauh dari yang diinginkan terdiri dari dua biaya yaitu *holding cost* sebesar 1 ($h = 1$) dan biaya produksi sebesar 1 ($K = 1$). Tingkat inventori yang diinginkan adalah tetap, yaitu sebesar 10 ($\hat{I} = 10$), sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan berupa fungsi $\theta(t) = 0.01 + 0.001t$. Permintaan konsumen yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi $D(t) = 2 \cos(2t) + 4$.

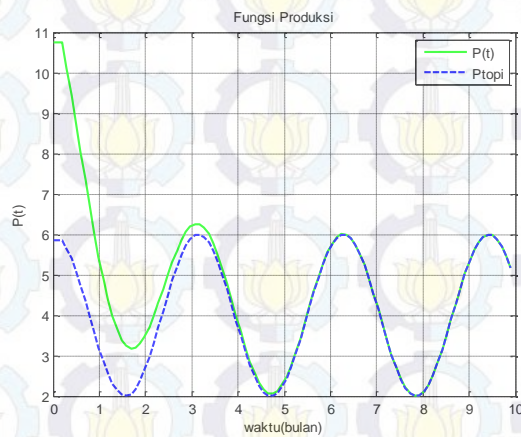


Gambar 4.14 Fungsi permintaan bentuk cosinus

Gambar 4.14 menggambarkan grafik fungsi permintaan bentuk cosinus. Grafik tersebut menunjukkan bahwa permintaan konsumen kadang meningkat dan kadang menurun. Permintaan tersebut juga dapat dikatakan sebagai permintaan musiman yaitu permintaan yang berulang setiap periode dikarenakan faktor cuaca, libur, atau kecenderungan perdagangan. Dengan permintaan yang digambarkan oleh grafik tersebut, didapatkan grafik fungsi inventori yang ditunjukkan oleh Gambar 4.15 dan grafik fungsi produksi yang ditunjukkan oleh Gambar 4.16.

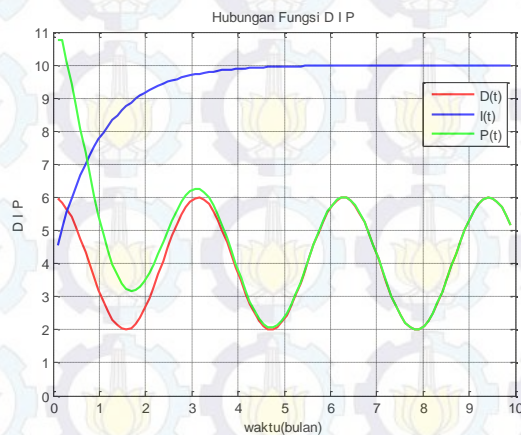


Gambar 4.15 Fungsi inventori pada kasus ketiga



Gambar 4.16 Fungsi produksi pada kasus ketiga

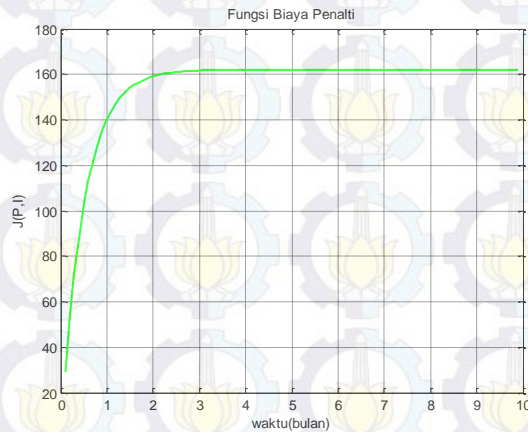
Gambar 4.15 dan Gambar 4.16 menunjukkan bahwa banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi menuju tingkat yang diinginkan. Hal tersebut, membuat biaya penalti menjadi minimum. Hubungan antara $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ dapat dilihat pada Gambar 4.17 berikut.



Gambar 4.17 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus ketiga

Gambar 4.17 menunjukan hubungan antara fungsi permintaan yang berbentuk persamaan cosinus dengan banyaknya inventori yang optimal dan banyaknya produksi yang optimal. Gambar tersebut menunjukkan bahwa saat $t < 5$ grafik fungsi produksi diatas grafik fungsi permintaan sehingga banyaknya inventori meningkat, sedangkan saat $t > 5$ grafik fungsi produksi sama dengan grafik fungsi permintaan, sehingga banyaknya inventori tetap.

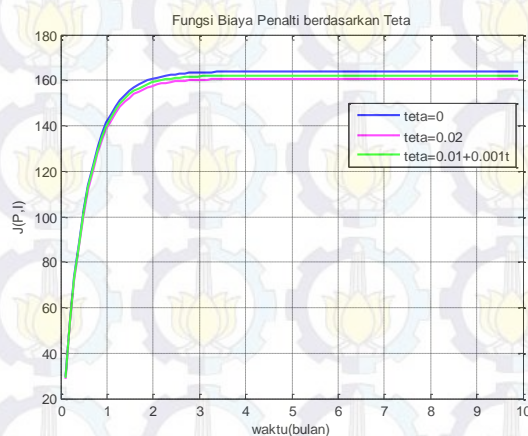
Banyaknya barang yang diproduksi dan banyaknya inventori mempengaruhi biaya penalti. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya penalti yang dijelaskan pada Gambar 4.18 berikut.



Gambar 4.18 Fungsi biaya penalti kasus ketiga

Fungsi biaya penalti pada Gambar 4.18 menunjukkan bahwa pada selang waktu $0 < t < 5$ grafik meningkat, sedangkan pada $t \geq 5$ grafik menuju nilai yang tetap. Pada Gambar 4.19 dijelaskan pengaruh $\theta(t)$ pada grafik biaya penalti.

Gambar 4.19 menunjukkan bahwa terdapat perbedaan fungsi biaya penalti untuk $\theta(t)$ yang berbeda yaitu $\theta(t) = 0$ yang artinya tidak tingkat kerusakan pada inventori, $\theta(t) = 0,02$ yang artinya tingkat kerusakan adalah konstan sebesar 0,02, $\theta(t) = 0,01 + 0,001t$ yang artinya tingkat kerusakan bergantung pada waktu.

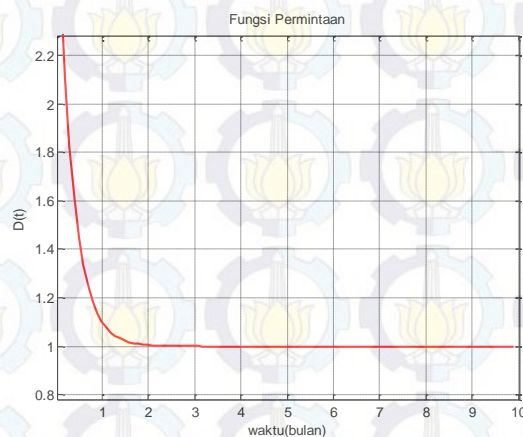


Gambar 4.19 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus ketiga

Pada Gambar tersebut, untuk $\theta(t) = 0$ menghasilkan biaya yang paling tinggi diantara ketiganya, sedangkan untuk $\theta(t) = 0,02$ menghasilkan biaya yang paling rendah.

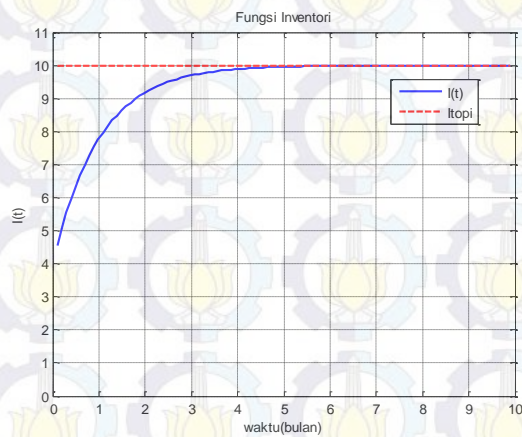
4.3.3 Permintaan konsumen menurun

Misalkan untuk kasus keempat, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 10 bulan ($T = 10$), dengan suku bunga adalah 1% perbulan ($\rho = 0.01$), dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 4 unit ($I_0 = 4$). Biaya penalti yang akan ditanggung perusahaan jika banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi jauh dari yang diinginkan terdiri dari dua biaya yaitu *holding cost* sebesar 1 ($h = 1$) dan biaya produksi sebesar 1 ($K = 1$). Banyaknya inventori yang diinginkan adalah tetap, yaitu sebesar 10 ($\hat{I} = 10$), sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan berupa fungsi $\theta(t) = 0.01 + 0.001t$. Permintaan konsumen yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi $D(t) = 2e^{-3t} + 1$.

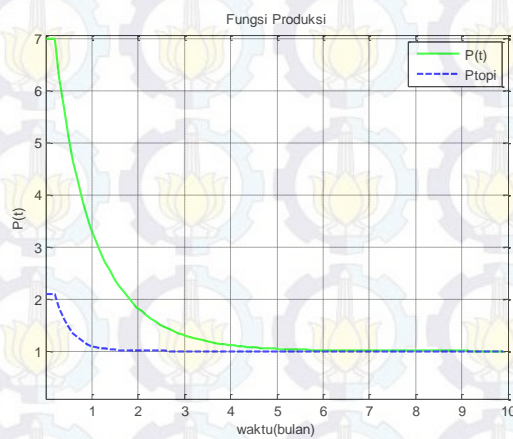


Gambar 4.20 Fungsi permintaan bentuk eksponensial

Gambar 4.20 menggambarkan grafik fungsi permintaan bentuk eksponensial. Grafik tersebut menunjukkan bahwa permintaan konsumen semakin menurun terhadap fungsi waktu.. Dengan permintaan yang digambarkan oleh grafik tersebut, didapatkan grafik fungsi inventori yang ditunjukkan oleh Gambar 4.21 dan grafik fungsi produksi yang ditunjukkan oleh Gambar 4.22.

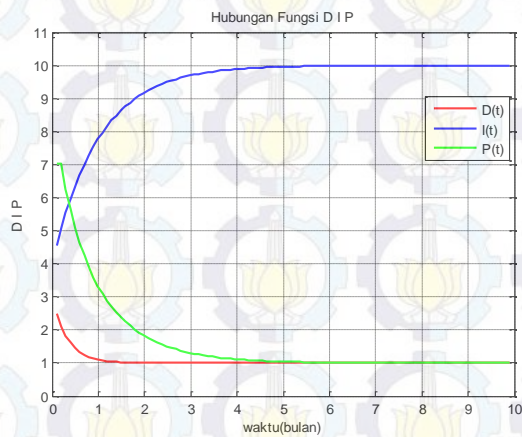


Gambar 4.21 Fungsi inventori pada kasus keempat



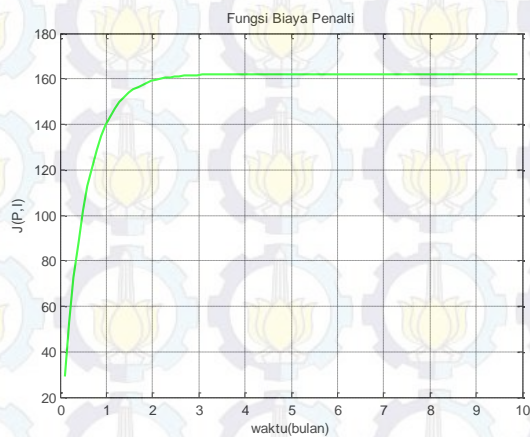
Gambar 4.22 Fungsi produksi pada kasus keempat

Gambar 4.21 dan Gambar 4.22 menunjukkan bahwa banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi menuju yang diinginkan. Hal tersebut membuat biaya penalti menjadi minimum. Hubungan antara $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ dapat dilihat pada Gambar 4.23.



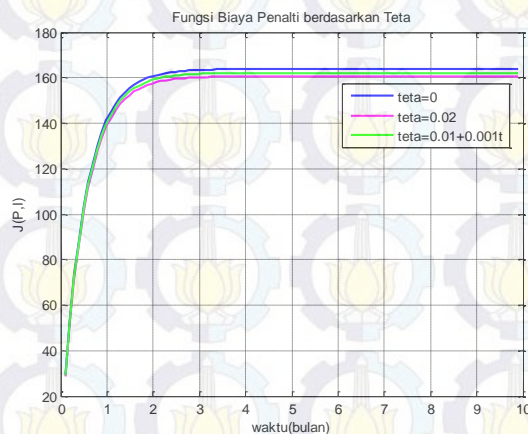
Gambar 4.23 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus keempat

Banyaknya produksi dan banyaknya inventori mempengaruhi biaya penalti. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya penalti yang dijelaskan pada Gambar 4.24 berikut.



Gambar 4.24 Fungsi biaya penalti kasus keempat

Fungsi biaya penalti pada Gambar 4.24 menunjukkan bahwa pada selang waktu $0 < t < 6$ grafik meningkat, sedangkan pada $t \geq 6$ grafik menuju nilai yang tetap. Pada Gambar 4.25 dijelaskan pengaruh $\theta(t)$ pada grafik biaya penalti.

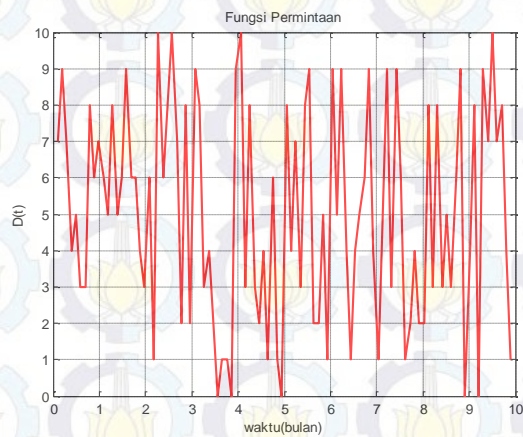


Gambar 4.25 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus keempat

Gambar 4.25 menunjukkan bahwa terdapat perbedaan fungsi biaya penalti untuk $\theta(t)$ yang berbeda yaitu $\theta(t) = 0$ yang artinya tidak tingkat kerusakan pada inventori, $\theta(t) = 0,02$ yang artinya tingkat kerusakan adalah konstan sebesar 0,02, $\theta(t) = 0,01 + 0,001t$ yang artinya tingkat kerusakan bergantung pada waktu. Pada Gambar tersebut, untuk $\theta(t) = 0$ menghasilkan biaya yang paling tinggi diantara ketiganya, sedangkan untuk $\theta(t) = 0,02$ menghasilkan biaya yang paling rendah.

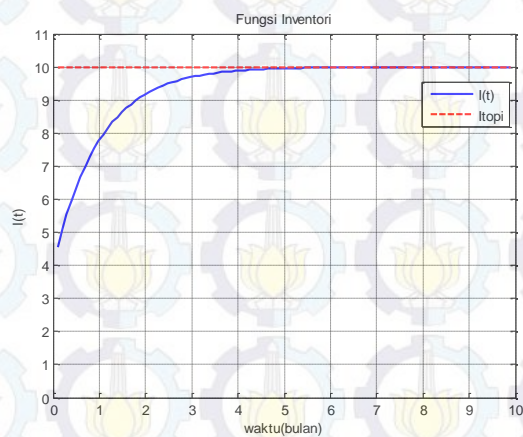
4.3.4 Permintaan konsumen tidak pasti

Misalkan untuk kasus kelima, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 10 bulan ($T = 10$), dengan suku bunga adalah 1% perbulan ($\rho = 0.01$), dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 4 unit ($I_0 = 4$). Biaya penalti yang akan ditanggung perusahaan jika banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi jauh dari yang diinginkan terdiri dari dua biaya yaitu *holding cost* sebesar 1 ($h = 1$) dan biaya produksi sebesar 1 ($K = 1$). Banyaknya inventori yang diinginkan adalah tetap, yaitu sebesar 10 ($\hat{I} = 10$), sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan berupa fungsi $\theta(t) = 0.01 + 0.001t$. Permintaan konsumen yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi $D(t)$ yang ditampilkan pada Gambar 4.26.

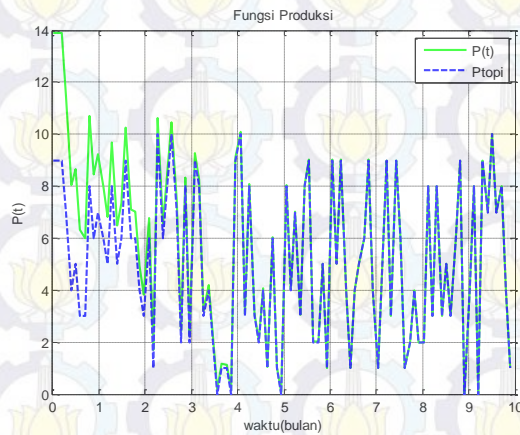


Gambar 4.26 Fungsi permintaan tidak pasti

Gambar 4.26 menunjukkan bahwa permintaan konsumen tidak menentu sepanjang waktu. Dengan permintaan yang digambarkan oleh grafik tersebut, didapatkan grafik fungsi inventori yang ditunjukkan oleh Gambar 4.27 dan grafik fungsi produksi yang ditunjukkan oleh Gambar 4.28.

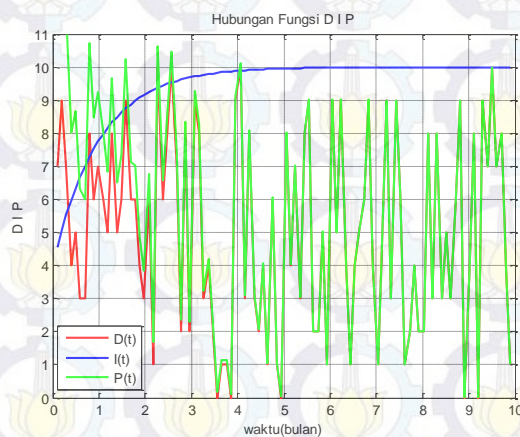


Gambar 4.27 Fungsi inventori pada kasus kelima



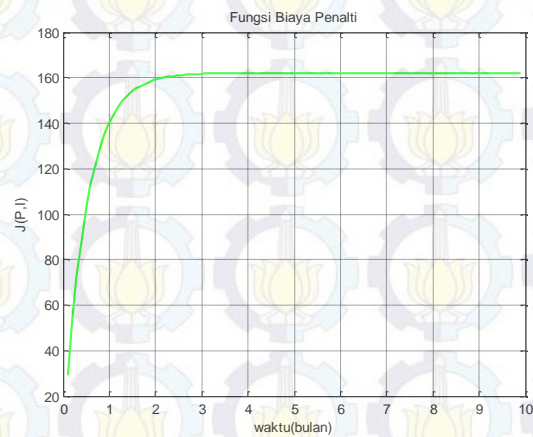
Gambar 4.28 Fungsi produksi pada kasus kelima

Gambar 4.28 dan Gambar 4.29 menunjukkan bahwa banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi menuju yang diinginkan. Hal tersebut membuat biaya penalti menjadi minimum. Hubungan antara $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ dapat dilihat pada Gambar 4.30.



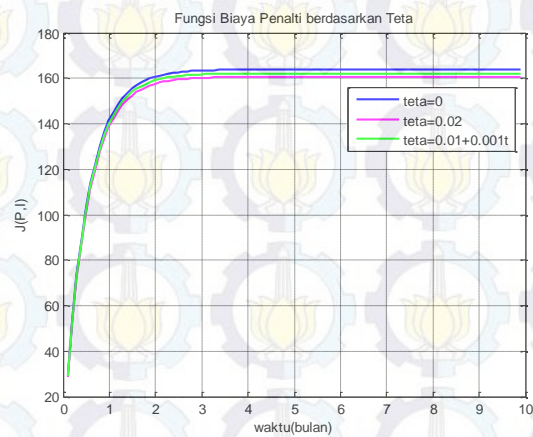
Gambar 4.29 Hubungan fungsi $D(t)$, $I^*(t)$, dan $P^*(t)$ kasus kelima

Banyaknya produksi dan banyaknya inventori mempengaruhi biaya penalti. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya penalti yang dijelaskan pada Gambar 4.30 berikut.



Gambar 4.30 Fungsi biaya penalti kasus kelima

Fungsi biaya penalti pada Gambar 4.30 menunjukkan bahwa pada selang waktu $0 < t < 4,5$ grafik meningkat, sedangkan pada $t \geq 4,5$ grafik menuju nilai yang tetap. Pada Gambar 4.31 dijelaskan pengaruh $\theta(t)$ pada grafik biaya penalti.



Gambar 4.31 Fungsi biaya penalti terhadap perubahan $\theta(t)$ kasus keempat

Gambar 4.31 menunjukkan bahwa terdapat perbedaan fungsi biaya penalti untuk $\theta(t)$ yang berbeda yaitu $\theta(t) = 0$ yang artinya tidak tingkat kerusakan pada inventori, $\theta(t) = 0,02$ yang artinya tingkat kerusakan adalah konstan sebesar 0,02, $\theta(t) = 0,01 + 0,001t$ yang artinya tingkat kerusakan bergantung pada waktu. Pada Gambar tersebut, untuk $\theta(t) = 0$ menghasilkan biaya yang paling tinggi diantara ketiganya, sedangkan untuk $\theta(t) = 0,02$ menghasilkan biaya yang paling rendah.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan tesis pada Bab 1 dan pembahasan pada Bab 4, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Hubungan antara banyaknya permintaan, banyaknya produksi, dan banyaknya inventori sangat berkaitan. Saat banyaknya produksi lebih besar daripada banyaknya permintaan konsumen, maka produk masuk ke dalam inventori. Saat inventori sudah penuh, produksi hanya memenuhi permintaan konsumen dan memenuhi inventori sebagai pengganti inventori yang rusak pada gudang.
2. Hasil simulasi menunjukkan bahwa untuk semua permintaan konsumen, grafik fungsi biaya penalti menuju nilai yang tetap. Hal tersebut dikarenakan grafik fungsi inventori menuju inventori yang diinginkan dan grafik fungsi produksi menuju produksi yang diinginkan.
3. Biaya penalti bernilai minimum saat banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi mencapai nilai yang optimal. Hasil simulasi menunjukkan, untuk tingkat kerusakan produk ($\theta(t)$) yang berbeda, dapat disimpulkan bahwa semakin besar tingkat kerusakan produk maka semakin rendah biaya penaltinya.

5.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah model sistem inventori dengan penggunaan data permintaan konsumen yang sesungguhnya (studi kasus), pengaruh fungsional dari tingkat kerusakan produk terhadap fungsi biaya penalti, dan menambahkan kontrol perbaikan produk yang rusak.

DAFTAR PUSTAKA

- Bounkhel, M. dan Tadj, L. (2005), "Optimal Control of Deteriorating Production Inventory System", *APPS*, Vol. 7, hal. 30-45.
- Bryson, A. E. dan Ho, Y. C. (1975), *Applied Optimal Control*, Halsted Press, New York.
- Ginting, R. (2007), *Sistem Produksi*, Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Hedjar, R., Bounkhel, M., dan Tadj, L. (2007), "Self-Tuning Optimal Control Of Periodic-Review Production Inventory Systems With Deteriorating Items", *Advanced Modelling And Optimization*, Vol 9, No. 1, hal. 91-104.
- Khemlnitsky, E. dan Gerchak, Y. (2002), "Optimal Control Approach to Production Systems with Inventory-Level-Dependent Demand". *IIE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, hal. 289-292.
- Naidu, D. S. (2002), *Optimal Control Systems*. CRC Press, New York.
- Ristono, A. (2009), *Manajemen Perediaan*, Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Sethi, S. dan Thompson, G. (2000), *Optimal Control Theory: Application to Management Science and Economics*, 2nd edition. Springer, New York.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Listing program fungsi P, fungsi Q, fungsi R, dan fungsi Teta

Berikut ini adalah *Listing* program untuk fungsi P, Q, R, dan Teta yang dipanggil pada *Listing* program utama

fungsiP.m	
1	<code>function y = fungsiP(rho)</code>
2	<code>y=rho;</code>
fungsiQ.m	
1	<code>function y = fungsiQ(hc,K,rho,x,teta_dot)</code>
2	<code>y=(hc/K)+((fungsiTeta(x))^2)+(rho*(fungsiTeta(x)))-teta_dot;</code>
fungsiR.m	
1	<code>function y = fungsiR(rho,x,I_topi,hc,K,teta_dot)</code>
2	<code>y=-((hc/K)*I_topi)-(((fungsiTeta(x))^2)*I_topi)-</code>
3	<code>(rho*(fungsiTeta(x))*I_topi)+teta_dot*I_topi;</code>
fungsiTeta.m	
1	<code>function y = fungsiTeta(x)</code>
2	<code>y=0.01+0.001*x;</code>

Lampiran 2 Listing program utama

program_utama.m	
1	<code>clear all;</code>
2	<code>clc;</code>
3	
4	<code>%parameter masukan</code>
5	<code>rho=0.01;</code>
6	<code>a=0;</code>
7	<code>T=10;</code>
8	<code>b=T;</code>
9	<code>I0=4;</code>
10	<code>I_topi=10;</code>
11	<code>alpha=I0;</code>
12	<code>beta=I_topi;</code>
13	<code>%h=0.1;</code>
14	<code>hc=1;</code>
15	<code>K=1;</code>
16	<code>n=100;</code>
17	<code>h=(b-a)/(n+1);</code>
18	<code>disp('fungsi permintaan konsumen');</code>
19	<code>disp('1. fungsi kuadrat');</code>
20	<code>disp('2. fungsi sin');</code>
21	<code>disp('3. fungsi cos');</code>
22	<code>disp('4. fungsi eksponensial');</code>
23	<code>disp('5. permintaan random');</code>

```

24 pilih=input('masukkan pilihan nomor permintaan: ');
25
26 for i=1:n
27     I_topi2(i)=10;
28 end
29 I_topi2;
30
31 for i=1:n
32     x=a+i*h;
33     teta(i)=fungsiTeta(x);
34 end
35 teta;
36 teta_dot=0.001;
37
38 %mencari elemen matriks A
39 for i=1:n
40     x=a+i*h;
41     A(i,i)=2+h^2*fungsiQ(hc,K,rho,x,teta_dot);
42 end
43 for i=1:n-1
44     x=a+i*h;
45     A(i,i+1)=-1+((h/2)*fungsiP(rho));
46 end
47 for i=2:n
48     x=a+i*h;
49     A(i,i-1)=-1-((h/2)*fungsiP(rho));
50 end
51 A;
52
53 %mencari elemen vektor b
54 x=a+h;
55 b(1,1)=-
56 h^2*fungsiR(rho,x,I_topi,hc,K,teta_dot)+(1+((h/2)*fungsiP(rho)))
57 *alpha;
58 for i=2:118
59     x=a+i*h;
60     b(i,1)=-h^2*fungsiR(rho,x,I_topi,hc,K,teta_dot);
61 end
62 xn=a+n*h;
63 b(n,1)=-h^2*fungsiR(rho,xn,I_topi,hc,K,teta_dot)+(1-
64 ((h/2)*fungsiP(rho)))*beta;
65 b;
66
67 %menggabungkan vektor b ke dalam matriks A
68 for i=1:n
69     A(i,n+1)=b(i);
70 end
71 A;
72
73 %proses eliminasi gauss
74 % Inputan :
75 %     ut : elemen-elemen diagonal utama
76 %     bw : elemen-elemen diagonal bawah
77 %     at : elemen-elemen diagonal atas
78 for i = 1:n
79     ut(i) = A(i,i);

```

```

81 end
82 for i = 1:n
83     if i ==1
84         bw(i) = 0;
85     else
86         bw(i) = A(i,i-1);
87     end
88 end
89 for i = 1:n
90     if i <= n-1
91         at(i) = A(i,i+1);
92     else
93         at(i) = 0;
94     end
95 end
96
97 z = zeros(n,1);
98 w = z;
99 y = ut(1);
100 w(1) = b(1)/y;
101 for i=2:n
102     z(i-1) = at(i-1)/y;
103     y = ut(i) - bw(i)*z(i-1);
104     w(i) = ( b(i) - bw(i)*w(i-1) )/y;
105 end
106 for j=n-1:-1:1
107     w(j) = w(j) - z(j)*w(j+1);
108 end
109 I=w;
110
111 I_dot(1)=(I(2)-I0)/(2*h);
112 I_dot(n)=(I_topi-I(n-1))/(2*h);
113 for i=2:(n-1)
114     I_dot(i)=(I(i+1)-I(i-1))/(2*h);
115 end
116 I_dot;
117
118 for i=1:n
119     x(i)=a+i*h;
120 end
121 x;
122
123 switch pilih
124     case 1
125         disp('Permintaan berupa fungsi kuadrat yaitu');
126         disp('aa*x^2+bb*x+cc');
127         disp('masukkan aa,bb,dan cc');
128         aa=input('aa: ');
129         bb=input('bb: ');
130         cc=input('cc: ');
131         for i=1:n
132             x(i)=a+i*h;
133             D(i)=aa*x(i)^2+bb*x(i)+cc;
134             P_topi(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
135             lambda(i)=K*exp(-rho*x(i))*(I_dot(i)-
136                 teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
137             P(i)=P_topi(i)+(exp(rho*x(i))*lambda(i))/K;

```

```

138
139     End
140     Pbaru(1)=P(1);
141     P_topibaru(1)=P_topi(1);
142     for i=2:n
143         xbaru(i)=a+i*h;
144         P_topibaru(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
145         lambdabar(i)=K*exp(-rho*xbaru(i))*(I_dot(i)-
146             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
147         Pbaru(i)=P_topibaru(i)+(exp(rho*xbaru(i))*lambda
148             baru(i))/K;
149     end
150
151
152 case 2
153     disp('Permintaan berupa fungsi sinus yaitu');
154     disp('aa*sin(bb*x)+cc');
155     disp('masukkan aa,bb,dan cc');
156     aa=input('aa: ');
157     bb=input('bb: ');
158     cc=input('cc: ');
159     for i=1:n
160         x(i)=a+i*h;
161         D(i)=aa*sin(bb*x(i))+cc;
162         P_topi(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
163         lambda(i)=K*exp(-rho*x(i))*(I_dot(i)-
164             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
165         P(i)=P_topi(i)+(exp(rho*x(i))*lambda(i))/K;
166     End
167     Pbaru(1)=P(2);
168     P_topibaru(1)=P_topi(2);
169     for i=2:n
170         xbaru(i)=a+i*h;
171         P_topibaru(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
172         lambdabar(i)=K*exp(-rho*xbaru(i))*(I_dot(i)-
173             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
174         Pbaru(i)=P_topibaru(i)+(exp(rho*xbaru(i))*lambda
175             baru(i))/K;
176     end
177
178 case 3
179     disp('Permintaan berupa fungsi cosinus yaitu');
180     disp('aa*cos(bb*x)+cc');
181     disp('masukkan aa,bb,dan cc');
182     aa=input('aa: ');
183     bb=input('bb: ');
184     cc=input('cc: ');
185     for i=1:n
186         x(i)=a+i*h;
187         D(i)=aa*cos(bb*x(i))+cc;
188         P_topi(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
189         lambda(i)=K*exp(-rho*x(i))*(I_dot(i)-
190             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
191         P(i)=P_topi(i)+(exp(rho*x(i))*lambda(i))/K;
192     End
193     Pbaru(1)=P(2);
194     P_topibaru(1)=P_topi(2);

```

```

195     for i=2:n
196         xbaru(i)=a+i*h;
197         P_topibaru(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
198         lambdabar(i)=K*exp(-rho*xbaru(i))*(I_dot(i)-
199             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
200
201         Pbaru(i)=P_topibaru(i)+(exp(rho*xbaru(i))*lambda
202             baru(i))/K;
203     end
204
205 case 4
206     disp('Permintaan berupa fungsi eksponensial yaitu');
207     disp('aa*exp(bb*x)+cc');
208     disp('masukkan aa,bb,dan cc');
209     aa=input('aa: ');
210     bb=input('bb: ');
211     cc=input('cc: ');
212     for i=1:n
213         x(i)=a+i*h;
214         D(i)=aa*exp(bb*x(i))+cc;
215         P_topi(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
216         lambda(i)=K*exp(-rho*x(i))*(I_dot(i)-
217             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
218         P(i)=P_topi(i)+(exp(rho*x(i))*lambda(i))/K;
219     End
220     Pbaru(1)=P(2);
221     P_topibaru(1)=P_topi(2);
222     for i=2:n
223         xbaru(i)=a+i*h;
224         P_topibaru(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
225         lambdabar(i)=K*exp(-rho*xbaru(i))*(I_dot(i)-
226             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
227         Pbaru(i)=P_topibaru(i)+(exp(rho*xbaru(i))*lambda
228             baru(i))/K;
229     end
230 case 5
231     disp('Permintaan acak');
232     disp('D=[7 9 7 4 5 3 3 8 6 7 6 5 8 5 6 9 6 6 4 3 6 1
233         10 6 8 10 7 2 8 2 9 8 3 4 2 0 1 1 0 9 10 3 8 3
234         2 4 1 6 1 0 8 4 7 3 8 9 2 2 5 1 9 5 9 4 1 4 5 6
235         9 4 1 5 9 3 9 6 1 2 4 2 2 8 3 8 3 5 3 6 9 0 4 8
236         0 9 7 10 7 8 4 1]');
237     D=[7 9 7 4 5 3 3 8 6 7 6 5 8 5 6 9 6 6 4 3 6 1 10 6
238         8 10 7 2 8 2 9 8 3 4 2 0 1 1 0 9 10 3 8 3 2 4 1
239         6 1 0 8 4 7 3 8 9 2 2 5 1 9 5 9 4 1 4 5 6 9 4 1
240         5 9 3 9 6 1 2 4 2 2 8 3 8 3 5 3 6 9 0 4 8 0 9 7
241         10 7 8 4 1];
242     for i=1:n
243         x(i)=a+i*h;
244         P_topi(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
245         lambda(i)=K*exp(-rho*x(i))*(I_dot(i)-
246             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
247         P(i)=P_topi(i)+(exp(rho*x(i))*lambda(i))/K;
248     end
249     Pbaru(1)=P(2);
250     P_topibaru(1)=P_topi(2);
251     for i=2:n

```

```

252         xbaru(i)=a+i*h;
253         P_topibaru(i)=teta(i)*I_topi+D(i);
254         lambdabar(i)=K*exp(-rho*xbaru(i))*(I_dot(i)-
255             teta(i)*I_topi+teta(i)*I(i));
256         Pbaru(i)=P_topibaru(i)+(exp(rho*xbaru(i))*lambda
257             baru(i))/K;
258     end
259 end
260
261 it=0;
262 Jjum(1)=0;
263 i=1;
264 while (i<=n)
265     Jlama(i)=0.5*exp(-rho*x(i))*(hc*(I(i)-
266         I_topi)^2+K*(P(i)-P_topi(i))^2);
267     Jjum(it+1)= Jlama(i)+Jjum(it+1);
268     Jbaru(i)=Jjum(it+1);
269     i=i+1;
270 end
271 Jbaru;
272
273 %Output Gambar
274 disp('Plot');
275 figure(1);
276 plot(x,D,'red','LineWidth',1.5);
277 xlabel('waktu');
278 ylabel('D(t)');
279 grid on;
280 title('Fungsi Tingkat Permintaan');
281
282 figure(2);
283 plot(x,I,'blue','LineWidth',1.5);
284 hold on
285 plot(x,I_topi2,'red--','LineWidth',1.5);
286 hold off
287 axis ([0 12 0 11])
288 legend('I(t)','Itopi')
289 xlabel('waktu');
290 ylabel('I(t)');
291 grid on;
292 title('Fungsi Tingkat Inventori');
293
294 figure(3);
295 plot(xbaru,Pbaru,'Green','LineWidth',1.5);
296 hold on
297 plot(xbaru,P_topibaru,'blue--','LineWidth',1.5);
298 legend('P(t)','Ptopi');
299 hold off
300 xlabel('waktu');
301 ylabel('P(t)');
302 grid on;
303 title('Fungsi Tingkat Produksi');
304
305 figure(4);
306 plot(x,D,'red','LineWidth',1.5);
307 hold on

```



```

309 plot(x,I,'blue','LineWidth',1.5);
310 hold on
311 plot(x,P,'green','LineWidth',1.5);
312 hold off
313 legend('D(t) ','I(t) ','P(t) ');
314 xlabel('waktu');
315 ylabel('D I P');
316 grid on;
317 title('Fungsi Tingkat D I P');
318
319 figure(5);
320 plot(x,Jbaru,'green','LineWidth',1.5);
321 xlabel('waktu');
322 ylabel('J(P,I) ');
323 grid on;
324 title('Fungsi Biaya Penalti');

```

BIODATA PENULIS



Penulis yang memiliki nama lengkap Vylde Pavela lahir di Jombang, 20 Februari 1991. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari SDN Jombatan 3 Jombang, SMP Negeri 2 Jombang, dan SMA Negeri 2 Jombang. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2009. Penulis lulus sarjana dengan delapan semester dan wisuda pada bulan

Oktober 2013 dengan mendapat gelar Sarjana Sains. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2013 dengan NRP. 1213 201 203. Untuk membentuk jaringan atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email pyylda@yahoo.com.